

第 VII 章 血液流变学行为的本构方程表达与应用

第一节：稳态流中的本构方程

什么是稳态流

是指流体流线与流速稳定的，不随时间而变的流动。

为什么要用本构方程表达

原因在于血液黏度表达在科学意义上有一定缺陷性。因为血液属于非牛顿流体，该类流体的黏度值不是一个常数，而是随着切变率（或切应力）条件而改变的。也就是说该流体的黏度值表达是随着施加切变率（或切应力）不同而改变的函数。这种函数有两类：一类称剪切稀化类，另一类称剪切稠化类。前者是：流体随着切变率（或切应力）提高而黏度值在下降；而后者是：流体随着切变率（或切应力）提高而黏度值在增高。血液属于前者，随着切变率（或切应力）提高而黏度值在下降；反之也可以说血液随着切变率（或切应力）下降而黏度值在增高。因此用黏度来表达血液流变学的行为，就会产生如下的错误感觉：

1.对于非流变学工作者（如医生与生命科学工作者）就会错误地认为，黏度指标是个不科学的东西，为什么会因为施加切变率（或切应力）的不同而黏度值会不同的，成为他们不可理解的问题，因而他们认为黏度的本身就是不科学的指标与技术，从心理上就蔑视了黏度测定及其应具有的知识与价值。

2.由于血液可以因为施加切变率（或切应力）的不同而黏度值会不同的原因，因此一些黏度计的生产商就利用这一点，生产了非标准化的黏度计，在市场上进行竞争推销，当然那些一个小时可以自动测定血液样本数目多的，而又一个小时内打印出结果速度快的产品公司，就可以竞争性地赚到更多的不光彩的利润。而医生与病家又不太了解这种基础原理知识，如为什么会因为施加切变率（或切应力）的不同而黏度值会不同的。因此医院的自身的声誉与病人的血液贡出与经费贡出均付出了无价值的代价。

3.中科院力学研究所陶祖莱教授在 1986 年的在上海召开的“第二届全国血液流变学会议”提倡应该选择适合的流变学本构方程的回归参数，来取代血液粘度的表达方法更为科学，就可以避免上述两个存在的问题的存在与蔓延。因为它应用函数中的方程参数来表达，在数值既具有稳定性，也具有物理学与生物学的意义。

4.本作者施永德实验室等人按照陶祖莱教授的思路，作了实验研究表明，从稳态流动而言，从多个本构方程中进行了选择，结果是卡松方程为优。他们建议可以使用卡松方程参数代替血液黏度的表达，来避免如上（1、2）的毛病。

卡松方程参数代替血液黏度的表达的理由根据

施永德实验室工作者用 71 例血液标本，对 7-1-1 表中这系列 5 个方程进行拟合回归，计算其中回归相关系数 R 值那个方程为最接近于 1、那个方程的标准估计误差值为最小，这是选择出比较适合的方程科学的统计学的方法。

表 7-1-1 中的 5 个方程为流变学中常用的本构方程（所谓本构方程就是阐明切应力与切变率之间关系的方程式），这些方程均以牛顿方程（表中 1 号）为基础发展而来。

如果表中 2 号的浜汗方程去除屈服应力 τ_0 就与 1 号的牛顿方程一样。实验结果的统计学处理结果是，所有病例的血液均具有明显的屈服应力 τ_0 正数值，为此

就排除了血液不能够接纳 1 号的牛顿方程的检测，两者相比应该接纳 2 号的浜汗方程为妥。

如果表中的 3 号的幂指数方程的 n 为 1，也就与 1 号的牛顿方程一样。如果表中的 4 号的赫尔薛一巴尔克方程的 n 为 1，又去除屈服应力 τ_0 也就与 1 号的牛顿方程一样。因此 3、4 号方程也是以牛顿方程为基础而演变而来的。仅仅从 3、4 号方程而言。实验结果的统计学处理结果是，所有病例的血液均具有明显的屈服应力 τ_0 具有正数值，为此两者相比，就排除了血液不能够接纳 3 号的幂指数方程，两者相比应该接纳 4 号的赫尔薛一巴尔克方程为妥。

此外表中 5 号的卡松方程而言，如果除去屈服应力 τ_0 也就与 1 号的牛顿方程一样。因此它也是由牛顿方程为基础而发展出来的。实验结果的统计学处理结果是，所有病例的血液均具有明显的卡松方程屈服应力 τ_0 的正数值，为此就排除了血液的流变学方程不能够接纳 1 号的牛顿方程，两者相比应该接纳 5 号的卡松方程为妥。

表 7-1-1 流变学中常用的的本构方程(表中为 τ 切变应力, γ 为切变率, η_a 表现粘度)。

方程序列与名称	方程式(τ 切应力, γ 切变率)	表现粘度表达式 η_a
1 牛顿方程	$\tau = \eta_N \gamma$ η_N 为牛顿黏度	$\eta_a = \eta_N = \text{常数}$
2 浜汗方程	$\tau = \tau_0 + \eta_B \gamma$ τ_0 为屈服应力 η_B 为浜汗黏度常数	$\eta_a = \tau_0 / \gamma + \eta_B$
3 幂指数方程	$\tau = \eta_p \gamma^n$ η_p 为幂指数黏度常数 n 为幂指数	$\eta_a = \eta_p \gamma^{n-1}$
4 赫尔薛一巴尔克方程	$\tau = \tau_0 + \eta_H \gamma^n$ τ_0 为屈服应力 η_H 为赫尔薛一巴尔克黏度常数 n 为幂指数	$\eta_a = \tau_0 / \gamma + \eta_H \gamma^{n-1}$
5 卡松方程	$(\tau^{1/2} - \tau_0^{1/2})^2 = \eta_c \gamma$ τ_0 为屈服应力 η_c 为卡松黏度常数	$\eta_a = \eta_c + \tau_0 / \gamma + 2 \tau_0^{(1/2)} \eta_c^{(1/2)} \gamma^{-(1/2)}$

说明：上表中浜汗黏度常数、幂指数黏度常数、赫尔薛一巴尔克黏度常数、卡松黏度常数均不是黏度，而是属于本构方程的常数，但是在量纲上几乎是与黏度是一样的。

从上面的分析结果可见，不具有屈服应力 τ_0 的方程首先排除之，只有剩下的 2、4、5 等三个具有屈服应力 τ_0 的方程了。这三个方程中那个最优呢，通过回归相关系数 R 值来确定那个方程为最接近于 1、那个方程的标准估计误差值为最小，这才是比较适合方程。三者比较重结果是 5 号的卡松方程的 R 值最接近于 1，其标准估计误差值为最小，应该是 5 号的卡松方程比较合适，为此可以用卡松方程的两个参数（屈服应力 τ_0 和卡松方程参数卡松黏度 η_c ）对血液流变学行为进行描述是比较合适的。这一结果既为血液流变学的标准化测定做出了贡献，又给流变学测定中的合格或不合格产品做出了判别标准。这两个方程参数既是评定血液流变学行为的客观指标，也是考察流变学测定仪器是否合格的标志。

卡松方程也符合于圆柱形毛细管黏度计的计算

上述的卡松方程，是符合 COUETTE 黏度计（双圆筒形或椎板黏度计）的实验结果的，为了证明是否也符合于圆柱形毛细管黏度计的流动计算，施永德实验室工作者已经解出了流量 Q 与静液压 ΔP 之间的关系式如下：

$$Q^{1/2} = (\pi R^4 / 8 \eta_c L)^{1/2} [\Delta P^{1/2} - (8/7)(2L \tau_0 / R)]$$

上述公式中 Q 为流量，静液压为 ΔP ， R 为毛细管的内半径， L 为毛细管的长度。血液的卡松方程黏度为 η_c ，卡松屈服应力为 τ_0 。这两个可以通过 $Q^{1/2}$ 与 $\Delta P^{1/2}$ 的函数关系做直线回归或作图求的斜率与截距的数值：

斜率值（从计算中获得）= $\pi R^4 / 8 \eta_c L$

截距值（从计算中获得）= $(8/7)(2L \tau_0 / R)$

式中代入黏度计 R （毛细管的内半径）与 L （毛细管的长度），就可以获得卡松方程黏度 η_c 和卡松屈服应力 τ_0 。这两个方程的常数，来表达所测血液标本的流变学特性。

说明：上述方程如果除去截距，就是著名的泊肃叶定律，即：

$$Q^{1/2} = (\pi R^4 / 8 \eta_c L)^{1/2} \Delta P^{1/2}$$

两侧平方后即为：

$$Q = (\pi R^4 / 8 \eta_c L) \Delta P$$

也就是说泊肃叶定律是牛顿方程的稳定管流的表达。

卡松方程两个参数的物理与医学生物学意义

其中：卡松方程黏度 η_c 示：物理数学意义是：血液在切变率无限大时的表观黏度值；细胞生物学与医学意义是：展示了血液细胞在高切变率下的顺应性与柔软性的程度。

其中：卡松屈服应力 τ_0 示：物理数学意义是：血液在切变率无限小时所需要的切应力值；其细胞生物学与医学意义：展示了低切变率下血液细胞间的聚集性与流动性。

以上两个方程参数数值的过分提高，血液容易在血管内阻塞，容易导致闭塞性血管病（其中尤其是卡松屈服应力 τ_0 的提高）的后果。是导致心脑血管病以及各种闭塞性血管病的发病前的标志。也是检测与纠正当前质量低劣与优良的血液黏度计的重要指标，因为一些低劣血液黏度计的公司惧怕卡松方程的检验，因为应用卡松方程检验结果展示，一些低劣血液黏度计所测定的结果，转化为卡松方程参数时，是几乎不能够反映出正常人具有卡松方程屈服应力值的。

第二节、动态流中的本构方程

动态流

上面所论的是稳态流（当然也是层流的一种）。下面介绍一下动态流。动态流有两种：一种是涡流，另一种是层流。前者是一种无序流，后者是一种有序流，如滞后环技术（下面介绍此技术及其本构方程拟合）。

什么是力学滞后环

给某一个系统施加力时，这系统就会给出相应的反应力。前者是作用力，后者是反作用力。这一对力之间存在着某种依赖性，也存在着某种差异性。通过这一对力的分析，可知该系统的物质结构在受力过程中的变化，从而推知这一系统物质所具有的功能。举一个最简单

的例子，如用手把一把榔头对某块大岩石用力一敲，岩石的反作用力会把手上“虎口”振得非常疼痛，说明岩石的结构非常坚硬；如用手把同一榔头对于某块棉花毯一敲，棉花毯的反作用力很弱，不会把手上“虎口”振痛，说明棉花毯的结构非常柔软。从这一个简单的例子，可说明对于某一系统给以作用力与其反作用力的分析，可以知道物质的结构及其与功能的关系。岩石也好、棉花毯也好，这是大型的、人们所熟悉的东西与常识而已，不举这个例子普通人们也知道其原理和常识。然而对于人体的细胞、血液、精液、植物的匀浆液、蛋白质、核酸等生物物质而言，就有研究的特别价值了。所谓力学滞后环，是不仅观察作用力与反作用力之间的力量数值上的差异，而且还要观察作用力与反作用力之间在时间上存在着互相滞后与衰减的差异。把所给的作用力有小至大、反作用力发生数值与时间的关系，同时将其逆向过程也连续地记录下来，根据这一记录结果可以画出该系统的力学滞后环的图形，又根据滞后环的形状和曲线走向，可以推知系统内物质的结构和能量变化的关系。力学滞后环技术是一项高技术，它涉及到所给作用力数值自动控制与记录、反作用力产生数值系列的自动记录、以及与时间、温度等多维数据实时采集，有计算机与信息技术发展的今天，就能更妥善精密实现。此外医学生物学所研究的对象，往往是所取样品十分宝贵、索取样品量又少、所给样品系统的作用力是非常微小的（大了就把样品本身搞坏了），力小难以精确定量化、相应地其反作用力的数值也微量，因此这项技术在医学生物学中的研究，与工程学上相比，增加了难度，往往被传统医学生物学工作者所忽略。施永德实验室将血液、精液、含羞草匀浆液此三种力学滞后环的特点做作比较，说明该技术在医学生物学中有利用与普及的价值。

实现力学滞后环测定的技术条件

需给一个样品系统施加应力(或切变率)与时间呈三角波的伺服系统(如图 7—2—1)，也即给测定系统施加由零应力（或切变率）开始，按照一定时间间隔，逐步上升到一个最大值；然后按同一时间间隔，由此应力（或切变率）最大值退回至零。在此过程中，记录下给测定系统施加力数值、系统内部对此作反应的力、系统的温度与时间的对应记录。这些数据的采集若有计算机控制下自动实现，就更加容易些。施永德实验室的实验结果所采用的仪器是上海航天局矫树魁高级工程师为首所研制的空气轴承 HT 流变仪和美国 BROOKFIELD 所提供的计算机程序型 DVII 流变仪而实现的。上海和国外的行家，有足够能力达到以上水平。

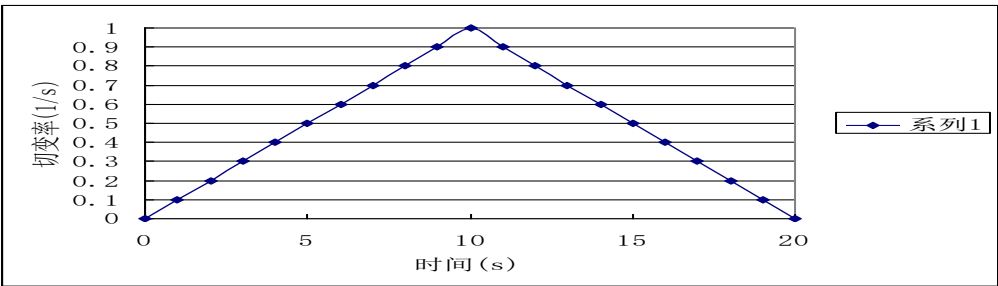


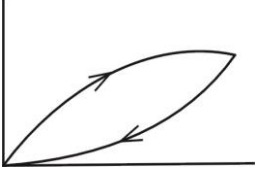
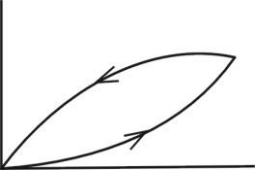
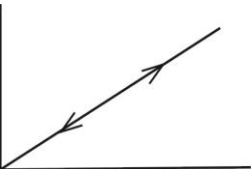
图 7—2—1 切变率（或应力）时控三角波伺服系统示意图

力学滞后环的方法、分类及理论基础

方法：将施加切变率的顺序为横坐标、将记录下的系统内部给出反作用应力作为纵坐标，进行作图，看这些图中的曲线的走向与数值，就可以用滞后环的理论与推测被测物质在力作用下结构的变化以及推测其所具有的功能。

分类与理论基础：以理论和作者结合实验室的测定结果，力学滞后环可分为 5 类（如表 7—2—1 所示）。

表 7-2-1 力学滞后环的分类及理论基础

类型	示意图（纵坐标为被测定系统给出的反作用应力[stress]，横坐标为人工施加给测定系统的切变率[shear rate]）	理论上曲线走向说明，以及力作用下系统内物质结构的变化和系统内能量变化
I		顺时针走向的单环：系统耗散外加作用力的能量（所围面积为能量密度速度的和），系统内物质结构由聚集变为分散，体系发生柔化和稀化。
II		逆时针走向的单环：系统内增加的能量，系统内物质结构由分散变为聚集，由颗粒形成三维网络结构，体系发生稠化或固化。
III		“8”字形走向的双环，中间有一个临界交点，近零处为逆时针走向（解释与 II 相一致），远零处为顺时针走向（解释与 I 相一致）。
IV		“8”字形走向的双环，近零处为顺时针走向，远零处为逆时针走向（虽然可如此推论，但作者尚未测定到过如此情景的材料）。
V		无环型，即上升线与下降线为完全重合的直线，如纯水测定结果就是如此，说明在力的作用下，系统结构和理化性质没任何改变。

上表的 5 个类型中，施永德实验室，除了表中的 IV 类型以外，其他几种类型已有过实验记录并尽力建立本构方程来描述如血液、精液、含羞草匀浆液的各自流变学特点，这一内容及其本构方程表达有待以后做详细介绍。

总结

在百姓中、医生中、科技工作者中、医学检验工作人员中，进行普及血液流变学行为的本构方程表达与应用，对流变学的理论与技术在医学生物学中的应用具有重要的价值。

本章参考文献

参考书籍 (3 本)

1. Shi Yong-de: HORIZONS IN HEMORHEOLOGY (PART I. BASIC CONCEPTS). Shanghai Scientific and Technological Literature Publishing House, 1990
2. Shi Yong-de: HORIZONS IN HEMORHEOLOGY (PART II. CLINICAL CONCEPTS). Shanghai Scientific and Technological Literature Publishing House, 1992
3. Shi Yong-de: HORIZONS IN HEMORHEOLOGY (PART III. CONSTITUTIVE CONCEPTS AND THEIR UTILIZATION IN MEDICINE). Shanghai Scientific and Technological Literature Publishing House, 1995

参考论文

有关卡松方程与屈服应力在医学中的应用的论文 (18 篇)

- 1 施永德、梁子钧: 三个流变学方程对血液流动曲线的拟合性比较。生物物理学报, 4 (1): 44-49, 79, 1988
- 2 施永德、梁子钧、陈叔奇、陈磊、步燕芳: CASSON 方程对血液, COUETTE 流和毛细管层流曲线的拟合及应用上。上海医科大学学报, 15 (3): 166-172, 1988
- 3 Chang Xin-feng, Yang Jin-wen, Shi Yong-de: Imitation of Casson equation to blood Couette flow for normal subjects. 26-30. EDITORS: Shi Yong-de (China), Artmann G (Germany), Lechner H (Austria): PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL CONFERENCE ON MEDICAL BIORHEOLOGY, APRIL 19-22, 1993, SHANGHAI, CHINA. SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS, 1993
- 4 Shi Yong-de, Qing Zhi-jiu, Tang Zhen-sheng, Yang Jin-wen: Imitation of Casson equation to blood Couette flow for ischemic stroke patients. 31-35, EDITORS: Shi Yong-de (China), Artmann G (Germany), Lechner H (Austria): PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL CONFERENCE ON MEDICAL BIORHEOLOGY, APRIL 19-22, 1993, SHANGHAI, CHINA. SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS, 1993
- 5 徐子猷、陈继岳、陈晓文、步燕芳、施永德: CASSON 方程拟合人体血液流变学曲线及应用 CASSON 参数对心血管病例的分析。上海医科大学学报, 23 (SUPPL): 73-74, 78, 1996
- 6 刘方平、吴全义、步燕芳、施永德: 血液 CASSON 黏度和屈服应力测量及影响因素分析。中国医学物理杂志, 13 (1): 16-17, 22, 1996
- 7 Shi Yong-de, Agosti R, Ticozzelli P, Nasrawi F, Villa S, Somazzi R, Giovagnoni MG, Longhini e: Hemorheological Observation on 139 cases of hypertension by Casson Equation. Clinical Hemorheology 16(4): 559-570, 1996
8. YD Shi, G Artmann, R Agosti, and E Longhini: A modified Casson equation to characterize blood rheology for hypertension. Clinical hemorheology and microcirculation, 19: 115-127, 1998
- 9 施永德: 血液黏度存在的问题及其如何应用卡松方程解决。中国血液流变学杂志, 8 (4): 4-7, 1998
- 10 施永德: 卡松方程在全血流变学的应用。中国血液流变学杂志, 9 (1): 1-4, 1999
11. 施永德: 卡松方程在全血流变学测定标准化中的作用。医学生物物理学, 第 9、10 辑, 169-176, 1999
- 12 施永德: 血液粘度的优点、问题及其解决方法。医学仪器与试剂, 1999, (1): 56-57

13 施永德: 切变率的施加顺序和剪切史对全血粘度值影响的初步研究。中国血液流变学杂志, 11(1): 206-211, 2001

14. 施永德: 切变率的施加顺序和剪切史对全血黏度测定值影响的初步研究。优秀科技论文选《中华优秀医学科技进步论文选》, 由现代医药出版社《中华优秀科技进步论文选编委会主编》出版, 2003年, 第1-4页

15 施永德、潘銮凤、Agosti R、Ticozelli P、Nasrawi F、Villa S、Somazzi R、Giovagnoni M、Longhini E: 卡松方程对纤维蛋白原和血细胞压积双重作用的表达。中华医学研究与实践, 2(6): 6-10, 2004

16 Ruan Ping, Yong Jun-guang, Shi Yong-de, Chai Ying: Analysis and significance of whole blood apparent viscosity, Casson viscosity and yield stress in hemorheology. Chinese Journal of Clinical Rehabilitation, 9(15): 192-193, 2005

17 施永德: 血液的屈服应力。中国血液流变学杂志, 23 (2): 199~202, 2013

18 施永德: 血液的屈服应力与衰老。中国血液流变学杂志, 26 (2): 135~142, 2016

有关动态流变学技术: 滞后环及其在医学生物学中应用的论文 (8篇)

1 Xing Wei-jun, Fang Min, Bu Yan-fang, Shi Yong-de: Studies on blood hysteresis loop, viscoelasticity and thixotropy for patients with coronary heart diseases. Journal of Applied Biomechanics, 10 (SUPPLEMENT): 76-85, 1995

2 Jiao Shu-kui, Ying Yao-guo, Jiang Xio-nian, Fang Bo, Shi Yong-de: Structure, features and functions of newest Shanghai Rheometer TM30 and its imitation for blood hysteresis loop by a new mathematical model. Journal of Applied Biomechanics, 10 (SUPPLEMENT): 86-87, 1995

3 施永德、潘銮凤、阳飞昆、Artmann Gerhard: 含羞草叶片匀浆液滞后环。植物生理与分子生物学学报, 275-280, 2003

4 Yong-de Shi: Hysteresis loops and applications in biology and medicine. Recent Advances in Mechanobiology, Chief editor: Shi Yongde, Honorary Chief Editor: ShuChien; Co-Chief editors: Masahiro Sokabe, Ching Kong, Boris Martinac, Keiji Naruse, Wojciech Dzwolak, pp 189-193, 2012, Shanghai Scientific and Technological Literature Publishing House.

5 Yong-de Shi, Luan-feng Pan, Fei-kun Yang, Si-qi Wang: A preliminary study on the rheological properties of human ejaculate and changes during liquefaction. Asian Journal of Andrology, 6(4): 299-304, 2004 (In English)

6 施永德: 力学滞后环技术及其在医学生物学中的应用。科技创新与产业升级 (2011 中国工博会论坛演讲文稿摘编)。主编: 王元、朱金海 pp166-175, 2011, 上海远东出版社。

7 施伟、矫树魁、杨景文、乐忠庆、施永德 (通讯作者): 非线性血液滞后环曲线的连续反应动力学数值解。中国血液流变学杂志, 26 (4): 289-396, 2016

8 Yongde Shi: Hysteresis loops and yield stress in cell research. In Biological. Physical and Technological Basis of Cell Engineering, Ed by Gerhard M. Artmann, Ayseguel Artmann, AzhaR a. Zhubanova, Hya Digel. Springer 2018, pp141~153